文章编号:1000-6893(2005)02-0224-05

切换线性奇异系统能达的必要条件

孟 斌，张纪峰
(中国科学院 数学与系统科学研究院，北京 100080)

Necessary Condition for Reachability of Switched Linear Singular Systems

MENG Bin, ZHANG Ji-feng
(Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

摘 要：在各子系统正则的条件下研究了切换线性奇异系统的能达性问题。对给定的切换序列定义了容许控制集合，以保证在该容许控制集合中的任意控制律的作用下，相应切换系统的状态都是连续的。基于切换线性奇异系统状态方程解的结构特点，定义了一系列子空间。利用所定义的子空间是循环不变子空间的特点，得到了切换线性奇异系统能达的必要条件。所给的必要条件涵盖了常规切换系统和非切换奇异系统的能达性必要条件。

关键词：切换系统；奇异系统；线性系统；能达性；容许性

中图分类号：O231.1 **文献标识码**：A

Abstract: The reachability problem of switched linear singular (SLS) systems is investigated under the regularity assumption of all subsystems. To ensure the continuity of the states of the SLS systems, for a given switching sequence an admissible control set is introduced. Based on the structure characteristics of the solution of the SLS system state equation, a series of subsystems are defined. By using the circular invariant characteristic of the defined subspaces, a necessary condition on complete reachability is given, which includes the existing conditions given for conventional (non-singular) switched systems and normal (non-switching) singular systems as its special cases.

Key words: switched systems; singular systems; linear systems; reachability; admissibility

由于切换控制系统大量存在于工程技术和社会领域中[1,2]，所以有关这类系统的分析与控制问题已引起广泛关注。而且在诸如切换系统的能达、能稳、控制器及切换策略设计、最优控制等许多问题上，都已取得重要进展[3~5]。在切换系统能达、能控性问题的研究方面近年来涌现出一批优秀的研究成果。文献[6]首次给出了周期型切换系统在一个周期之内能控性和能观性的判定条件。文献[4]严格定义了一般线性切换系统的能控性和能达性，给出了能控性和能达性的一个必要条件和一个充分条件。文献[7]利用能达集概念给出能控性和能达性的充要条件。文献[8]构造一个切换律，其能控集与切换系统任意切换律下的能控集相同，表明切换系统只由一个切换律即可实现其能控性。关于离散线性切换系统的能控、能达问题的研究，近年来也有一些结果[9,10]。

奇异系统是20世纪70年代Rosenbrock在研究复杂的电网络系统中首先提出的。近几十年来，对奇异系统能控性、能观性、最优控制、输出调节等问题的研究已取得很大进展[5,11~14]。由于奇异系统的切换问题普遍存在于电网络以及经济系统中，故研究切换线性奇异(SLS)系统的动态行为及控制器设计具有非常重要的理论和实际意义。但由于切换奇异系统存在正则性、脉冲模去除、切换时刻状态相容等问题，故较正常状态切换系统的研究要复杂。因此，最近虽然在SLS系统控制研究方面获得了一些基本成果[5,14]，但仍有大量的问题有待研究。文献[5]研究了具有马氏跳变参数的奇异混杂系统的渐近性质，借助于双时间尺度的思想，分析了系统的收敛性及复杂性降阶问题。文献[14]研究了所有子系统都不是R能稳的SLS系统的反馈容许控制律设计问题，通过设计状态反馈切换控制律和状态反馈输入控制律使得SLS系统容许，并且状态轨线连续。本文研究SLS系统的能达性问题，在切换子系统正则的条件下，给出了SLS系统能达的必要条件。

1 问题描述

考虑切换线性奇异(SLS)系统

$$\boldsymbol{E}_{\sigma(t)}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_{\sigma(t)}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_{\sigma(t)}\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}(t) \tag{1}$$

其中：$\sigma(t):[0,+\infty)\rightarrow\Lambda$，$\Lambda=\{1,2,\cdots,m\}$，为右

收稿日期：2004-08-30；修订日期：2004-12-27
基金项目：国家自然科学基金(60274021，60221301，60334040)资助项目

连续分段常值函数;$\boldsymbol{u}_i(t)\in\mathbf{R}^{m_i}$,$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$,$i\in\Lambda$,分别是系统的输入向量和状态向量;$\boldsymbol{A}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{B}_i\in\mathbf{R}^{n\times m_i}$,$\boldsymbol{E}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\mathrm{rank}\boldsymbol{E}_i=r_i\leqslant n$,$i\in\Lambda$。

由于 SLS 系统式(1)的解存在唯一的充要条件是$(\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{A}_i)$,$i\in\Lambda$,是正则的,所以,做如下假设:

假设 1　对所有的 $i\in\Lambda$,$(\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{A}_i)$都是正则的。

由假设 1,存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{Q}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$i\in\Lambda$,使得[12]

$$\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{Q}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{i_1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}_i\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Q}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_i & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{i_2}\end{bmatrix}\tag{2}$$

其中:$\boldsymbol{N}_i\in\mathbf{R}^{(n-n_i)\times(n-n_i)}$是幂零阵,幂零指数为 h_i;$\boldsymbol{G}_i\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$;$\boldsymbol{I}_{i_1}$,$\boldsymbol{I}_{i_2}$是适当维数的单位阵。记 $\boldsymbol{Q}_i^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{i1}\\ \boldsymbol{Q}_{i2}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{i1}\\ \boldsymbol{B}_{i2}\end{bmatrix}$,其中,$\boldsymbol{Q}_{i1}\in\mathbf{R}^{n_i\times n}$,$\boldsymbol{B}_{i1}\in\mathbf{R}^{n_i\times m_i}$。易见,$\boldsymbol{Q}_{i1}\boldsymbol{Q}_i=[\boldsymbol{I}_{n_i}\quad\boldsymbol{0}]$。

切换系统式(1)在初始时刻 t_0,初始状态 $\boldsymbol{x}_0$,控制输入 $\boldsymbol{u}$ 和切换律 $\sigma(t)$作用下 t 时刻的状态用 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma)$表示。对任给的时间区间$[t_1,t_2]$,设 $\sigma(t)$在其内有 k 个切换点 $t_{11},t_{12},\cdots,t_{1k}$($t_1<t_{11}<t_{12}<\cdots<t_{1k}<t_2$),即对任意的 $t\in[t_{1j},t_{1j+1})$,$\sigma(t)=\sigma(t_{1j})\in\Lambda$,$j=0,1,\cdots,k-1$,$t_{10}=t_1$,对任意的 $t\in[t_{1k},t_2]$,$\sigma(t)=\sigma(t_{1k})\in\Lambda$。为便于引用,下面将把此切换序列简记为$\{\sigma(t_{1j}),t_{1j}\}_{j=0}^{k}$。对任意给定的初值条件 $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}_0$,时间区间$[t_1,t_2]$上对应于切换序列 $\sigma=\{\sigma(t_{1j}),t_{1j}\}_{j=0}^{k}$的容许控制集定义为

$$\begin{aligned}&U_\sigma[t_1\quad t_2]=\\&\{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{u}=[\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{u}_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{u}_i\in C_{h-1}[t_1\quad t_2],\\&\sum_{r=0}^{h_{\sigma(t_{1j})}-1}\boldsymbol{N}_{\sigma(t_{1j})}^{r}\boldsymbol{B}_{\sigma(t_{1j})2}\boldsymbol{u}_{\sigma(t_{1j})}^{(r)}(t_{1j}^{+})=-\boldsymbol{Q}_{\sigma(t_{1j})2}\cdot\\&\qquad\boldsymbol{x}(t_{1j}^{-};t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma),\\&\qquad j=0,1,\cdots,k,t_{10}^{-}=t_1\}\end{aligned}\tag{3}$$

其中:$h=\max\{h_1,h_2,\cdots,h_m\}$;$C_h[t_1,t_2]$是定义在$[t_1,t_2]$上的 h 次连续可微函数的集合,$\boldsymbol{u}_{\sigma(t_{1j})}^{(r)}(t_{1j}^{+})$表示 $\boldsymbol{u}_{\sigma(t_{1j})}(t)$在 $t=t_{1j}$的 r 阶右导数,$\boldsymbol{x}(t_{1j}^{-};t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma)$表示 $\boldsymbol{x}(t;t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma)$在 $t=t_{1j}$的左极限。

注 1　式(3)说明,对任意给定的切换律 σ 和时间区间$[t_1,t_2]$,在 $U_\sigma[t_1,t_2]$中的任意控制下,系统式(1)的状态在整个时间区间$[t_1,t_2]$上都是连续的。这是因为,由

$$\boldsymbol{x}(t;t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma)=$$

$$\boldsymbol{Q}_{\sigma(t_{1j})}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{G_{\sigma(t_{1j})}(t-t_{1j})}\boldsymbol{Q}_{\sigma(t_{1j})1}\boldsymbol{x}(t_{1j}^{-};t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma)\\ +\int_{t_{1j}}^{t}\mathrm{e}^{G_{\sigma(t_{1j})}(t-\tau)}\boldsymbol{B}_{\sigma(t_{1j})1}\boldsymbol{u}_{\sigma(t_{1j})}(\tau)\mathrm{d}\tau\\ -\sum_{r=0}^{h_{\sigma(t_{1j})}-1}\boldsymbol{N}_{\sigma(t_{1j})}^{r}\boldsymbol{B}_{\sigma(t_{1j})2}\boldsymbol{u}_{\sigma(t_{1j})}^{(r)}(t)\end{bmatrix}$$

$$\forall t\in[t_{1j},t_{1j+1})$$

可知,当 $t\to t_{1j}^{+}$时,

$$\boldsymbol{x}(t_{1j}^{+};t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma)=$$

$$\boldsymbol{Q}_{\sigma(t_{1j})}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{\sigma(t_{1j})1}\boldsymbol{x}(t_{1j}^{-};t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma)\\ -\sum_{r=0}^{h_{\sigma(t_{1j})}-1}\boldsymbol{N}_{\sigma(t_{1j})}^{r}\boldsymbol{B}_{\sigma(t_{1j})2}\boldsymbol{u}_{\sigma(t_{1j})}^{(r)}(t_{1j}^{+})\end{bmatrix}$$

进而,由 $U_\sigma[t_1,t_2]$的定义,得

$$\boldsymbol{x}(t_{1j}^{+};t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma)=$$

$$\boldsymbol{Q}_{\sigma(t_{1j})}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{\sigma(t_{1j})1}\boldsymbol{x}(t_{1j}^{-};t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma)\\ \boldsymbol{Q}_{\sigma(t_{1j})2}\boldsymbol{x}(t_{1j}^{-};t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma)\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}(t_{1j}^{-};t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\sigma)$$

即 $\boldsymbol{x}(t;t_1,\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{u},\sigma)$在切换点连续,因此在$[t_1,t_2]$连续。

定义 1　对系统式(1),如果对任意给定的初始时刻 $t_0\in\mathbf{R}$ 和状态 $\boldsymbol{x}_f\in\mathbf{R}^n$,都存在时刻 $t_f>t_0$,切换律 $\sigma(t)$和容许控制输入 $\boldsymbol{u}\in U_\sigma[t_0,t_f]$,使得系统式(1)从零初值出发的状态在 t_f 时刻等于 $\boldsymbol{x}_f$,即 $\boldsymbol{x}_f=\boldsymbol{x}(t_f;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)$,则称该系统为完全能达的。

若存在一个子系统 $i\in\Lambda$,$(\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i)$是能达的,则可令 $\sigma(t)=i$。此时,切换系统(1)是完全能达的。因此,不失一般性,本文仅考虑所有切换子系统都是不能达的情形。

2　预备知识

对给定矩阵 $\boldsymbol{B}$,$R(\boldsymbol{B})$表示由 $\boldsymbol{B}$ 的列张成的线性空间。给定矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{k\times k}$和子空间 $\boldsymbol{W}\subseteq\mathbf{R}^k$,定义$\langle\boldsymbol{A}|\boldsymbol{W}\rangle=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}^{i-1}\boldsymbol{W}$,对于适当维数的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,下面将把$\langle\boldsymbol{A}|R(\boldsymbol{B})\rangle$简记作$\langle\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\rangle$。可以证明,$\langle\boldsymbol{A}|\boldsymbol{W}\rangle$是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间。各子系统的能达集记为 $\boldsymbol{C}_i$,由文献[12]可知,$\boldsymbol{C}_i=\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{B}_{i1}\rangle\oplus\langle\boldsymbol{N}_i\mid\boldsymbol{B}_{i2}\rangle$,$\oplus$表示直和。为讨论方便,定义以下子空间

$$\left.\begin{aligned}V_1&=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{C}_i\\V_2&=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i(\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{Q}_{i1}V_1\rangle\oplus\langle\boldsymbol{N}_i\mid\boldsymbol{B}_{i2}\rangle)\\&\ \vdots\\V_n&=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i(\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{Q}_{i1}V_{n-1}\rangle\oplus\langle\boldsymbol{N}_i\mid\boldsymbol{B}_{in}\rangle)\\&\ \vdots\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

注 2 当 $\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{I}$ 时，$i\in\Lambda$，上面针对 SLS 系统定义的子空间 V_i 与文献[4]针对常规切换系统定义的子空间 V_i 相同。

下面说明式(4)定义的子空间与非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}_i$ 和 $\boldsymbol{Q}_i$ 的选择无关。对于正则束$(\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{A}_i)$，$i\in\Lambda$，假设存在不同于 $\boldsymbol{P}_i$ 和 $\boldsymbol{Q}_i$ 的非奇异矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 和 $\bar{\boldsymbol{Q}}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 使得

$$\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}_i\bar{\boldsymbol{Q}}_i=\mathrm{diag}(\bar{\boldsymbol{I}}_{i_1},\bar{\boldsymbol{N}}_i)\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{A}_i\bar{\boldsymbol{Q}}_i=\mathrm{diag}(\bar{\boldsymbol{G}}_i,\bar{\boldsymbol{I}}_{i_2})\qquad(5)$$

其中：$\bar{\boldsymbol{N}}_i\in\mathbf{R}^{(n-\bar{n}_i)\times(n-\bar{n}_i)}$ 是幂零阵，幂零指数为 $\bar{h}_i$；$\bar{\boldsymbol{G}}_i\in\mathbf{R}^{\bar{n}_i\times\bar{n}_i}$；$\bar{\boldsymbol{I}}_{i_1},\bar{\boldsymbol{I}}_{i_2}$ 是适当维数的单位阵。记 $\bar{\boldsymbol{Q}}_i^{-1}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}\\ \bar{\boldsymbol{Q}}_{i2}\end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_{i1}\\ \bar{\boldsymbol{B}}_{i2}\end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{C}}_i=\langle\bar{\boldsymbol{G}}_i\,|\,\bar{\boldsymbol{B}}_{i1}\rangle\oplus\langle\bar{\boldsymbol{N}}_i\,|\,\bar{\boldsymbol{B}}_{i2}\rangle$，其中：$\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}\in\mathbf{R}^{\bar{n}_i\times n}$，$\bar{\boldsymbol{B}}_{i1}\in\mathbf{R}^{\bar{n}_i\times m_i}$。

命题 1 在假设 1 下，若把由矩阵 $\bar{\boldsymbol{Q}}_i,\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1},\bar{\boldsymbol{G}}_i,\bar{\boldsymbol{N}}_i$，$\bar{\boldsymbol{B}}_{i1},\bar{\boldsymbol{B}}_{i2}$ 和 $\bar{\boldsymbol{C}}_i$，$i=1,2,\cdots,m$，依照式(4)定义的子空间记为 $\bar{V}_j$，$j=1,2,\cdots,n$，则 $V_j=\bar{V}_j$，$j=1,2,\cdots,n$。

命题 2 在假设 1 下，有

①$V_1\subseteq V_2\subseteq\cdots\subseteq V_n$。

② 如果存在 $1<i\leqslant n$，使得 $V_i=V_{i-1}$，则对 $\forall\, l>i$，有 $V_l=V_i$。

上述两个命题的证明见附录。

注 3 命题 2 表明，对任意的 $i<n$，有 $V_i\subseteq V_n$；对任意的 $j>n$，有 $V_j=V_n$。

为在下一节证明本文的主要结果，下面给出两个基本引理，其中引理 2 的证明见本文附录。

引理 1[12] 对任意给定的矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，存在连续函数 $f_0(t),f_1(t),\cdots,f_{n-1}(t)$，使得

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=f_0(t)\boldsymbol{I}+f_1(t)\boldsymbol{A}+\cdots+f_{n-1}(t)\boldsymbol{A}^{n-1}$$

引理 2 在假设 1 下，对 $\forall\, i\in\Lambda$，$\langle\boldsymbol{G}_i\,|\,\boldsymbol{B}_{i1}\rangle\subseteq\langle\boldsymbol{G}_i\,|\,\boldsymbol{Q}_{i1}V_k\rangle$，$k=1,2,\cdots,n$。

3 切换线性奇异系统能达的必要条件

定理 1 在假设 1 下，如果 SLS 系统式(1)是完全能达的，则 $V_n\in\mathbf{R}^n$。

证明 假设系统(1)是完全能达的，则由定义 1，对任意给定的 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，存在切换序列$\{i_j,t_j\}_{j=0}^{s}$，时刻 $t_f>t_s$，控制律 $\boldsymbol{u}\in U_\sigma[t_0,t_f]$，使得 $\boldsymbol{x}(t_f;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)=\boldsymbol{x}$。

首先，证明 $\boldsymbol{x}(t_1;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)\in V_1$。事实上，由注 1，即由系统式(1)的状态的连续性，可得 $\boldsymbol{x}(t_1;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)$ 即为切换系统式(1)在$(\boldsymbol{E}_{i_0},\boldsymbol{A}_{i_0},\boldsymbol{B}_{i_0})$作用下 t_1 时刻的状态，易见

$$\boldsymbol{x}(t_1;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)=\boldsymbol{Q}_{i_0}\begin{bmatrix}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{G}_{i_0}(t_1-\tau)}\boldsymbol{B}_{i_01}\boldsymbol{u}_{i_0}(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \displaystyle-\sum_{j=0}^{h_{i_0}-1}\boldsymbol{N}_{i_0}^{i}\boldsymbol{B}_{i_02}\boldsymbol{u}_{i_0}^{(j)}(t_1)\end{bmatrix}$$

进而，由引理 1 可得

$$\boldsymbol{x}(t_1;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)=$$
$$\boldsymbol{Q}_{i_0}\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{j=0}^{n_{i_0}-1}\boldsymbol{G}_{i_0}^{j}\boldsymbol{B}_{t_01}\int_{t_0}^{t_1}f_j(t_1-\tau)\boldsymbol{u}_{i_0}(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \displaystyle-\sum_{j=0}^{h_{i_0}-1}\boldsymbol{N}_{i_0}^{j}\boldsymbol{B}_{i_02}\boldsymbol{u}_{i_0}^{(j)}(t_1)\end{bmatrix}$$

于是由 $\boldsymbol{V}_1$ 的定义知 $\boldsymbol{x}(t_1;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)\in\boldsymbol{Q}_{i_0}(\langle\boldsymbol{G}_{i_0}\,|\,\boldsymbol{B}_{i_01}\rangle\oplus\langle\boldsymbol{N}_{i_0}\,|\,\boldsymbol{B}_{i_02}\rangle)\subseteq\boldsymbol{V}_1$。

现在研究 t_2 时刻的状态。易见

$$\boldsymbol{x}(t_2;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)=$$
$$\boldsymbol{Q}_{i_1}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\boldsymbol{G}_{i_1}(t_2-t_1)}\boldsymbol{Q}_{i_11}\boldsymbol{x}(t_1;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)\\ \displaystyle+\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{G}_{i_1}(t_2-\tau)}\boldsymbol{B}_{i_11}\boldsymbol{u}_{i_1}(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \displaystyle-\sum_{j=0}^{h_{i_1}-1}\boldsymbol{N}_{i_1}^{j}\boldsymbol{B}_{i_12}\boldsymbol{u}^{(j)}(t_2)\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{x}(t_1;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)\in\boldsymbol{V}_1$ 及引理 1，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\boldsymbol{G}_{i_1}(t_2-t_1)}\boldsymbol{Q}_{i_11}\boldsymbol{x}(t_1;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)\\ &\in\mathrm{e}^{\boldsymbol{G}_{i_1}(t_2-t_1)}\boldsymbol{Q}_{i_11}V_1\subseteq\langle\boldsymbol{G}_{i_1}\,|\,\boldsymbol{Q}_{i_11}V_1\rangle\end{aligned}\qquad(6)$$

类似于式(6)，由引理 1 和引理 2 得，

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{G}_{i_1}(t_2-\tau)}\boldsymbol{B}_{i_11}\boldsymbol{u}_{i_1}(\tau)\mathrm{d}\tau\in\\ &\langle\boldsymbol{G}_{i_1}\,|\,\boldsymbol{B}_{i_11}\rangle\subseteq\langle\boldsymbol{G}_{i_1}\,|\,\boldsymbol{Q}_{i_1}V_1\rangle\end{aligned}\qquad(7)$$

注意到

$$-\sum_{j=0}^{h_{i_1}-1}\boldsymbol{N}_{i_1}^{j}\boldsymbol{B}_{i_12}\boldsymbol{u}_{i_1}^{(j)}(t_2)\in\langle\boldsymbol{N}_{i_1}\,|\,\boldsymbol{B}_{i_12}\rangle\qquad(8)$$

于是，由式(6)～式(8)及 V_2 的定义，有 $\boldsymbol{x}(t_2;t_0,0,\boldsymbol{u},\sigma)\in\boldsymbol{Q}_{i_1}(\langle\boldsymbol{G}_{i_1}\,|\,\boldsymbol{Q}_{i_1}V_1\rangle\oplus\langle\boldsymbol{N}_{i_1}\,|\,\boldsymbol{B}_{i_12}\rangle)\subseteq V_2$。以此类推，$\boldsymbol{x}(t_f;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)\in V_{s+1}$。由注 3，$V_j\subseteq V_n$，$\forall\, j=1,2,\cdots,n$，所以，$V_{s+1}\subseteq V_n$，进而，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t_f;t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u},\sigma)\in V_n$。再由 $\boldsymbol{x}$ 的任意性可得 $V_n\in\mathbf{R}^n$。证毕

注 4 由定理 1，若 $\forall\, i\in\Lambda$，$\boldsymbol{G}_i=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2=\cdots=\boldsymbol{Q}_m$，$n_1=n_2=\cdots=n_m$，并且 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{B}_{21}\cdots\ \boldsymbol{B}_{m1}]<n_1$，则 SLS 系统式(1)一定不是完全能达的。

注 5 当 $\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{I}$ 时，$i\in\Lambda$，定理 1 所给的能达的必要条件便退化为文献[4]所给出的常规切换系统的能达的必要条件。

注 6 当 $m=1$ 时，即只有一个子系统、不存在切换现象时，因 $V_n=V_1=\boldsymbol{Q}_1(\langle\boldsymbol{G}_1\,|\,\boldsymbol{B}_{11}\rangle\oplus\langle\boldsymbol{N}_1\,|\,\boldsymbol{B}_{12}\rangle)$，所以定理 1 所给的能达性必要条件便退化

为文献[12]针对正常（非切换）奇异系统所给出的能达的必要条件。

4 结　论

在各子系统正则的前提下研究了切换线性奇异系统的能达性问题。对给定的切换序列定义了容许控制集合，以保证在该容许控制集合中的任意控制律的作用下，相应切换系统的状态都是连续的。基于切换线性奇异系统状态方程解的结构特点和循环不变子空间的方法，得到了切换线性奇异系统能达的必要条件。当系统退化为常规（即非奇异）切换系统时，所给的能达性条件便退化为文献[4]针对常规切换系统所给出的能达的必要条件；当系统退化为正常（即非切换）奇异系统时，所给能达性条件便退化为文献[12]针对正常奇异系统所给出的能达的必要条件。

附　录

为证明命题 1，先引入下述引理：

引理 3[12]　在假设 1 下，如果按照式(2)和式(5)中定义矩阵 $\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_i,\boldsymbol{G}_i,\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{B}_{i1},\boldsymbol{B}_{i2},\bar{\boldsymbol{P}}_i,\bar{\boldsymbol{Q}}_i,\bar{\boldsymbol{G}}_i,\bar{\boldsymbol{N}}_i,\bar{\boldsymbol{B}}_{i1},\bar{\boldsymbol{B}}_{i2}$，以及 n_i 和 $\bar{n}_i$，$i=1,2,\cdots,m$，则有 $n_i=\bar{n}_i$；并且存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}_{i1}\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$ 和 $\boldsymbol{T}_{i2}\in\mathbf{R}^{(n-n_i)\times(n-n_i)}$ 使得

$$\boldsymbol{P}_i=\mathrm{diag}(\boldsymbol{T}_{i1},\boldsymbol{T}_{i2})\bar{\boldsymbol{P}}_i\quad \boldsymbol{Q}_i=\bar{\boldsymbol{Q}}_i\mathrm{diag}(\boldsymbol{T}_{i1}^{-1},\boldsymbol{T}_{i2}^{-1})$$
$$\boldsymbol{G}_i=\boldsymbol{T}_{i1}\bar{\boldsymbol{G}}_i\boldsymbol{T}_{i1}^{-1}\qquad \boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{T}_{i2}\bar{\boldsymbol{N}}_i\boldsymbol{T}_{i2}^{-1}$$
$$\boldsymbol{B}_{i1}=\boldsymbol{T}_{i1}\bar{\boldsymbol{B}}_{i1}\qquad \boldsymbol{B}_{i2}=\boldsymbol{T}_{i2}\bar{\boldsymbol{B}}_{i2}$$

命题 1 的证明：对 j 作归纳法。由引理 3，经过简单计算易得 $h_i=\bar{h}_i$，$i=1,2,\cdots,m$，进而由 $\boldsymbol{C}_i$ 和 $\bar{\boldsymbol{C}}_i$ 的定义以及引理 3，可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{C}_i=\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{B}_{i1}\rangle\oplus\langle\boldsymbol{N}_i\mid\boldsymbol{B}_{i2}\rangle=\\&(R(\boldsymbol{B}_{i1})+\boldsymbol{G}_iR(\boldsymbol{B}_{i1})+\cdots+\boldsymbol{G}_i^{n_i-1}R(\boldsymbol{B}_{i1}))\oplus\\&(R(\boldsymbol{B}_{i2})+\cdots+\boldsymbol{N}_i^{h_i-1}R(\boldsymbol{B}_{i2}))=\\&(\boldsymbol{T}_{i1}R(\bar{\boldsymbol{B}}_{i1})+\boldsymbol{T}_{i1}\bar{\boldsymbol{G}}_iR(\bar{\boldsymbol{B}}_{i1})+\cdots+\boldsymbol{T}_{i1}\bar{\boldsymbol{G}}_i^{n_i-1}R(\bar{\boldsymbol{B}}_{i1}))\oplus\\&(\boldsymbol{T}_{i2}R(\bar{\boldsymbol{B}}_{i2})+\cdots+\boldsymbol{T}_{i2}\bar{\boldsymbol{N}}_i^{h_i-1}R(\bar{\boldsymbol{B}}_{i2}))=\\&\mathrm{diag}(\boldsymbol{T}_{i1},\boldsymbol{T}_{i2})((R(\bar{\boldsymbol{B}}_{i1})+\cdots+\bar{\boldsymbol{G}}_i^{n_i-1}R(\bar{\boldsymbol{B}}_{i1}))\oplus\\&(R(\bar{\boldsymbol{B}}_{i2})+\cdots+\bar{\boldsymbol{N}}_i^{h_i-1}R(\bar{\boldsymbol{B}}_{i2})))=\mathrm{diag}(\boldsymbol{T}_{i1},\boldsymbol{T}_{i2})\bar{\boldsymbol{C}}_i\end{aligned}$$

上式表明 $\boldsymbol{C}_i=\mathrm{diag}(\boldsymbol{T}_{i1},\boldsymbol{T}_{i2})\bar{\boldsymbol{C}}_i$，$i=1,2,\cdots,m$。于是由引理 3 有 $\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{C}_i=\bar{\boldsymbol{Q}}_i\bar{\boldsymbol{C}}_i$，从而根据 V_1 和 $\bar{V}_1$ 的定义，有 $V_1=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{C}_i=\sum_{i=1}^{m}\bar{\boldsymbol{Q}}_i\bar{\boldsymbol{C}}_i=\bar{V}_1$，即 $j=1$ 时命题成立。

假设 $V_j=\bar{V}_j$，$j<k$。下面考虑 $j=k$ 的情形。

由引理 3，$\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}$ 和 $\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}$ 的定义，可得 $\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}\\\bar{\boldsymbol{Q}}_{i2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{i1}&\\&\boldsymbol{T}_{i2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}\\\bar{\boldsymbol{Q}}_{i2}\end{bmatrix}$，因此，$\boldsymbol{Q}_{i1}=\boldsymbol{T}_{i1}\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}$，进而，由引理 3 和归纳假设，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_k=&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i(\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{Q}_{i1}V_{k-1}\rangle\oplus\langle\boldsymbol{N}_i\mid\boldsymbol{B}_{i2}\rangle)=\\&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i((R(\boldsymbol{Q}_{i1}V_{k-1})+\boldsymbol{G}_iR(\boldsymbol{Q}_{i1}V_{k-1})+\\&\cdots+\boldsymbol{G}_i^{n_i-1}(R(\boldsymbol{Q}_{i1}V_{k-1}))\oplus\\&(R(\boldsymbol{B}_{i2})+\cdots+\boldsymbol{N}_i^{h_i-1}R(\boldsymbol{B}_{i2})))=\\&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i((\boldsymbol{T}_{i1}R(\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}\bar{V}_{k-1})+\boldsymbol{T}_{i1}\bar{\boldsymbol{G}}_iR(\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}\bar{V}_{k-1})+\\&\cdots+\boldsymbol{T}_{i1}\bar{\boldsymbol{G}}_i^{n_i-1}R(\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}\bar{V}_{k-1}))\oplus\\&(\boldsymbol{T}_{i2}R(\bar{\boldsymbol{B}}_{i2})+\cdots+\boldsymbol{T}_{i2}\bar{\boldsymbol{N}}_i^{h_i-1}R(\bar{\boldsymbol{B}})))=\\&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i\mathrm{diag}(\boldsymbol{T}_{i1},\boldsymbol{T}_{i2})((R(\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}\bar{V}_{k-1})+\\&\bar{\boldsymbol{G}}_iR(\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}\bar{V}_{k-1})+\cdots+\bar{\boldsymbol{G}}_i^{n_i-1}R(\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}\bar{V}_{k-1}))\oplus\\&(R(\bar{\boldsymbol{B}}_{i2})+\cdots+\bar{\boldsymbol{N}}_i^{h-1}R(\bar{\boldsymbol{B}}_{i2})))=\\&\sum_{i=1}^{m}\bar{\boldsymbol{Q}}_i(\langle\bar{\boldsymbol{G}}_i\mid\bar{\boldsymbol{Q}}_{i1}\bar{V}_{k-1}\rangle\oplus\langle\bar{\boldsymbol{N}}_i\mid\bar{\boldsymbol{B}}_{i2}\rangle)=\bar{V}_k\end{aligned}$$

根据归纳法原理，可得 $V_j=\bar{V}_j$，$j=1,2,\cdots,n$。

证毕

命题 2 的证明：

① 对 $\forall k>1$，由 $\boldsymbol{V}_{k+1}$ 的定义，有

$$\begin{aligned}V_{k+1}=&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i(\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{Q}_{i1}V_k\rangle\oplus\langle\boldsymbol{N}_i\mid\boldsymbol{B}_{i2}\rangle)\supseteq\\&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i(\boldsymbol{Q}_{i1}V_k\oplus\langle\boldsymbol{N}_i\mid\boldsymbol{B}_{i2}\rangle)\supseteq\\&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i(\boldsymbol{Q}_{i1}(\boldsymbol{Q}_i(\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{Q}_{i1}V_{k-1}\rangle\oplus\langle\boldsymbol{N}_i\mid\boldsymbol{B}_{i2}\rangle))\oplus\\&\langle\boldsymbol{N}_i\mid\boldsymbol{B}_{i2}\rangle)\supseteq\\&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{Q}_i(\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{Q}_{i1}V_{k-1}\rangle\oplus\langle\boldsymbol{N}_i\mid\boldsymbol{B}_{i2}\rangle)=V_k\end{aligned}$$

其中：第 1 个 $\supseteq$ 是利用了 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 的定义；第 2 个 $\supseteq$ 是利用了 V_k 的定义，并只取第 i 项；第 3 个 $\supseteq$ 是利用了 $\boldsymbol{Q}_{i1}\boldsymbol{Q}_i=[\boldsymbol{I}_{n_i}\quad \boldsymbol{0}]$。

②由 V_i 的定义易证。　　证毕

引理 2 的证明：用归纳法。由 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 和 $\boldsymbol{V}_1$ 的定义以及 $\boldsymbol{Q}_{i1}\boldsymbol{Q}_i=[\boldsymbol{I}_{n_i}\quad \boldsymbol{0}]$，可得

$$\langle\boldsymbol{G}_{i1}\mid\boldsymbol{Q}_{i1}V_1\rangle\supseteq\boldsymbol{Q}_{i1}V_1\supseteq\boldsymbol{Q}_{i1}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{C}_i=\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{B}_{i1}\rangle$$

上式表明 $\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{B}_{i1}\rangle\subseteq\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{Q}_{i1}V_1\rangle$，$\forall i\in\Lambda$。现在假设 $j=k-1$ 时，有 $\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{B}_{i1}\rangle\subseteq\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{Q}_{i1}V_{k-1}\rangle$，$\forall i\in\Lambda$。考虑 $j=k$ 的情形。由 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 和 V_k 的定义，有

$$\langle\boldsymbol{G}_i\mid\boldsymbol{Q}_{i1}V_k\rangle\supseteq\boldsymbol{Q}_iV_k\supseteq\boldsymbol{Q}_{i1}\boldsymbol{Q}_i$$

$(\langle \boldsymbol{G}_i \mid \boldsymbol{Q}_{i1} V_{k-1} \rangle \oplus \langle \boldsymbol{N}_i \mid \boldsymbol{B}_{i2} \rangle) = \langle \boldsymbol{G}_i \mid \boldsymbol{Q}_{i1} V_{k-1} \rangle$

因此由归纳法可得 $\langle \boldsymbol{G}_i \mid \boldsymbol{B}_{i1} \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{G}_i \mid \boldsymbol{Q}_{i1} V_k \rangle$。因此，根据归纳法原理，引理得证。

参 考 文 献

[1] Sira-Ramirez H. Nonlinear P-I controller design for switchmode dc-to-dc power converters [J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1991, 38 (4): 410－417.

[2] Williams S M, Hoft R G. Adaptive frequency domain cotrol of PWM switched power line conditioner [J]. IEEE Trans Power Electron, 1991, 6 (4): 665－670.

[3] Cheng D Z, Guo L, Huang J. On quadratic Lyapunov functions [J]. IEEE Trans Automat Contr, 2003, 48 (5): 885－890.

[4] Sun Z D, Zheng D Z. On reachability and stabilization of switched linear systems [J]. IEEE Trans Automat Contr, 2001, 46(2): 291－295.

[5] Yin G, Zhang J F. Hybrid singular systems of differential equations [J]. Science in China (Series F), 2002, 45(4): 241－258.

[6] Ezzine J, Haddad A H. Controllability and observability of hybrid systems [J]. Int J Control, 1989, 49(6): 2045－2055.

[7] Sun Z D, Ge S S, Lee T H. Controllability and reachability criteria for switched linear systems [J]. Automatica, 2002, 38(5): 775－786.

[8] Xie G M, Wang L. Controllability and stabilizability of switched linear-systems [J]. Syst Contr Lett, 2003, 48 (2): 135－155.

[9] Ge S S, Sun Z D, Lee T H. Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems [J]. IEEE Trans Automat Contr, 2001, 46(9): 1437－1441.

[10] Xie G M, Wang L. Reachability realization and stabilizability of switched linear discrete-time systems [J]. J Math Anal Appl, 2003, 280: 209－220.

[11] Cheng Z L, Hong H M, Zhang J F. The optimal regulation of generalized state-space systems with quadratic cost [J]. Automatica, 1988, 24(5): 707－710.

[12] Dai L Y. Singular control systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Volume 118 [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[13] Huang J, Zhang J F. Impluse-free output regulation of singular nonlinear systems [J]. Int J Control, 1998, 71 (5): 789－806.

[14] Meng B, Zhang J F. Admissible switched feedback control design of singular systems [A]. Proc of the 23rd Chinese Control Conference [C]. Shanghai: East China University of Science and Technology Press, 2004. 1615－1619.

作者简介：

孟　斌 (1973－)　女，山东聊城人，中国科学院数学与系统科学研究院在读博士生。研究方向：切换奇异系统。

张纪峰 (1963－)　男，山东平邑人，1985年本科毕业于山东大学数学系，1991年博士毕业于中国科学院系统科学研究所。现为中国科学院数学与系统科学研究院研究员、博士生导师、系统科学研究所副所长、系统控制重点实验室主任，中国自动化学会理事、副秘书长，《系统科学与数学》副主编、《自动化学报》、《控制理论及应用》编委，美国 IEEE 协会高级会员。研究方向：系统建模与适应控制，随机系统、广义系统、时变参数系统等。已发表学术论文60余篇。曾获中国科学院青年科学家奖一等奖、国家杰出青年科学基金。网址：http://lsc.amss.ac.cn/～jif/

(责任编辑：李泓洁)